

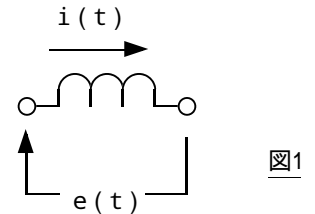
# LR回路1

## コイルの性質

コイル（インダクタンス）に電流を流すと磁束ができる。磁束（磁界）には、変化を妨げようとする働きがある。そのために、コイルに流れる電流を変化させようとする、電流変化に伴う磁束変化に対抗できるだけの電圧を外部から加えなければならない。逆に、一定の電流が流れている状態では、コイルの両端に電圧は発生しない。

時刻  $t$  においてコイルに流れる電流を  $i(t)$ 、両端の電圧を  $e(t)$  とすると、次の関係式が成り立つ。この式で  $L$  はインダクタンス[H、ヘンリー]である。

$$e(t) = L \times \frac{di(t)}{dt} \quad \dots (A)$$



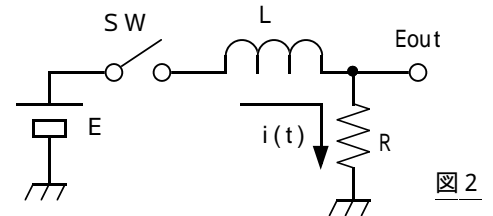
A式において、電流が増加しているとき、すなわち  $di(t)/dt > 0$  のときには、電圧が図1の極性でプラスとなる。

## LR回路の計算1

図2の回路において、時刻  $t = 0$  にSWがオンした場合の、任意の

時刻  $t > 0$  における  $E_{out}$  を求める。

流れる電流  $i(t)$  を考えると次の関係が成り立つ。



$$E = i(t) \times R + L \times \frac{di(t)}{dt} \quad \dots (B)$$

この式から  $i(t)$  を求めるには、CR回路1の補足2を参考にして、 $i(t) = x \exp(-t) +$  とおいてこれをB式に代入する。

$$\begin{aligned} E &= \left( x \exp(-t) + \right) \times R + L \times \left( -x \exp(-t) \right) \\ &= xR \times \exp(-t) + xR + L \times \left( -x \exp(-t) \right) \\ &= xR + \left( xR + L \times \left( -x \right) \right) \times \exp(-t) \\ xR - E + \left( xR + L \times \left( -x \right) \right) \times \exp(-t) &= 0 \\ xR &= E, \quad R = -Lx \\ &= E/R, \quad = -R/L \end{aligned}$$

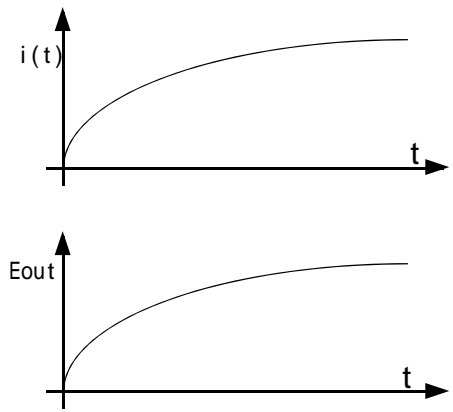
$$i(t) = x \exp(-t) + = x \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) + \frac{E}{R} \quad \dots (C)$$

ここで、時刻  $t = 0$  において  $i(t) = 0$  という初期条件をC式に当てはめると、 $= -E/R$  となり、D式が求まる。

$$i(t) = \frac{E}{R} \left( 1 - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) \right) \quad \dots (D)$$

$$E_{out}(t) = E \left( 1 - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) \right) \quad \dots (E)$$

SWがオンになる前は、Lには電流が流れておらず、 $E_{out} = 0V$ である。SWがオンになると電圧EがLとRに加わるが、その時点でLに流れる電流 (= Rに流れる電流) はゼロであり、電圧EはすべてLにかかる。Lに電圧Eがかかると、Lに電流が流れはじめ (電流の増加率  $di/dt = E/L$ )、電流が流れはじめるとRの両端に電圧が生じるので、Lにかかる電圧が減少し、それで電流の増加率は徐々に減少しながら、電流そのものは増加し続ける。そして最終的には、電流  $i(t) = E/R$  で定常状態となる。定常状態ではLに流れる電流は一定で、Lにかかる電圧はゼロとなる。



L R回路の計算2

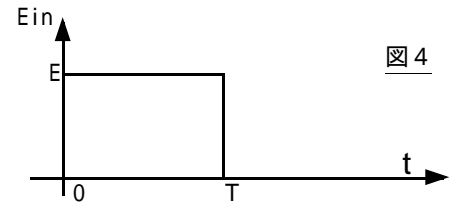
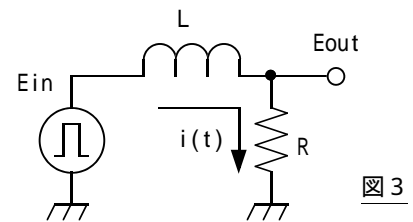
図3の回路で図4の  $E_{in}(t)$  に対する  $i(t)$  と  $E_{out}(t)$  を求める。

時刻  $t = 0$  から  $t = T$  までは上の計算と同じであり、D式、E式が成り立つ。

時刻  $t = T$  における  $i(t)$ 、 $E_{out}(t)$  は次式である。

$$i(T) = \frac{E}{R} \left( 1 - \exp\left(-\frac{R}{L}T\right) \right)$$

$$E_{out}(T) = E \left( 1 - \exp\left(-\frac{R}{L}T\right) \right)$$



時刻  $t = T$  において  $E_{in} = E$  から  $E_{in} = 0V$  に変化する。その時、LとRには電流  $i(T)$  が流れていて、 $E_{out} = E_{out}(T)$  であるから、 $E_{in}=0V$  になると、Lにはそれまでとは逆向きの電圧がかかることになる。  
 $t \Rightarrow T$  では次の式が成り立つ。

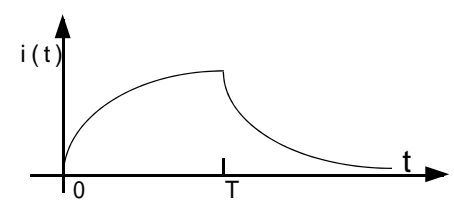
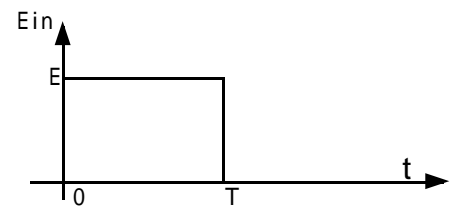
$$-i(t) \times R = L \times \frac{di(t)}{dt} \quad \dots (F)$$

この式から  $i(t)$  を求めるには、CR回路1の補足2を参考にして、 $i(t) = x \exp(-t) + \dots$  においてこれをB式に代入する。

$$-\left( x \exp(-t) + \dots \right) \times R = L \times \left( -x \exp(-t) + \dots \right)$$

G式をexpの項とそれ以外の項に分けて、 $x$ 、 $\dots$  について解き、 $t=T$ における  $i=i(T)$  の初期条件を与えると、 $t \Rightarrow T$ における  $i(t)$  をあらかずG式を得る。

$$i(t) = \frac{E}{R} \left( \exp\left(\frac{R}{L}T\right) - 1 \right) \times \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) + \dots (G)$$



以上の計算でわかるように、図2、3のLR回路では時定数  $\tau = L/R$  となる。

図5

### L R回路の計算3

図6の回路で、 $E_{in}(t)$ が図7のときの $i(t)$ と $E_{out}(t)$ を求める。

$0 < t < T$ の範囲では、 $E_{in} = E$ であり、次式が成り立つ。

$$E = i(t) \times R + L \times \frac{di(t)}{dt}$$

この式は1ページのB式と同じであり、 $i(t)$ も同じく次式となる。

$$i(t) = \frac{E}{R} \left( 1 - \exp\left(-\frac{R}{L} t\right) \right)$$

また、 $E_{out}(t) = E_{in} - R \times i(t)$ であり、次式となる。

$$E_{out}(t) = E \times \exp\left(-\frac{R}{L} t\right)$$

$E_{out}(t)$ は図8のような波形となる。時刻 $t=T$ において、 $E_{out}(t)$ は次式となる。

$$E_{out}(T) = E \times \exp\left(-\frac{R}{L} T\right)$$

次に時刻 $t > T$ の時の $i(t)$ 、 $E_{out}(t)$ を求める。時刻 $t=T$ より後では、 $E_{in}=0V$ であり、一方、抵抗 $R$ には電流 $i(t)$ が流れているから、 $L$ にかかる電圧 $E_{out}(t)$ は次式となる。この式は2ページのF式と同じであり、 $i(t)$ も同じ式となる。

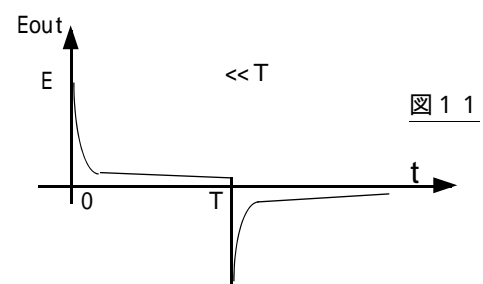
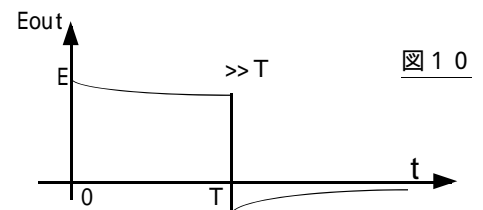
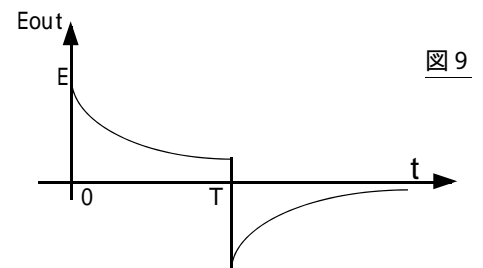
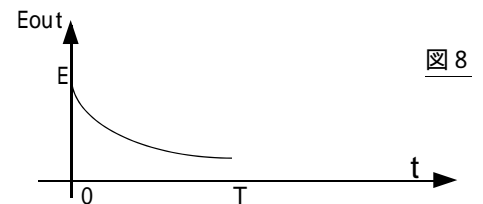
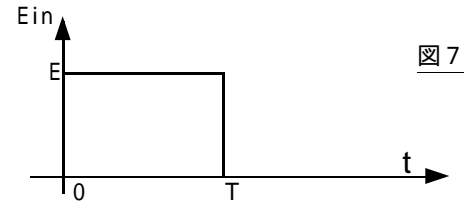
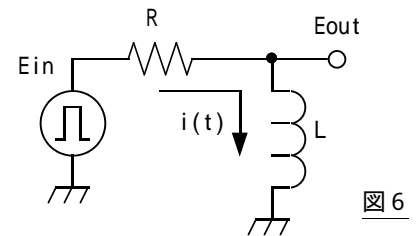
$$0 - R \times i(t) = E_{out}(t) = L \times \frac{di(t)}{dt}$$

$$i(t) = \frac{E}{R} \left( \exp\left(\frac{R}{L} T\right) - 1 \right) \times \exp\left(-\frac{R}{L} t\right)$$

時刻 $t \rightarrow T$ における $E_{out}(t)$ の式は次のようになり、これを図9に示す。この図でわかるように、時刻 $t=T$ で $E_{in}=0V$ となった瞬間に $E_{out}$ はマイナスとなり、そこから $0V$ に向かって変化してゆく波形となる。

$$\begin{aligned} E_{out}(t) &= -R \times i(t) \\ &= -E \times \left( \exp\left(\frac{R}{L} T\right) - 1 \right) \times \exp\left(-\frac{R}{L} t\right) \end{aligned}$$

以上の説明では、時定数  $T$  の場合の波形を示したが、 $\gg T$  の場合および  $\ll T$  の場合には計算式は同じでも、波形の様子は図10、11のように違ったものになる。



L R 回路の周波数特性

図 1 2 の回路で、伝達関数  $G_v(\omega)$  は次式となる。

$$G_v(\omega) = \frac{e_{out}}{e_{in}} = \frac{R}{R + j\omega L}$$

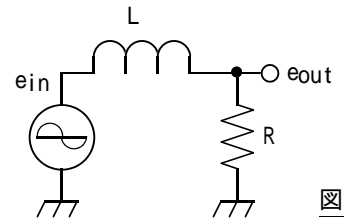


図 1 2

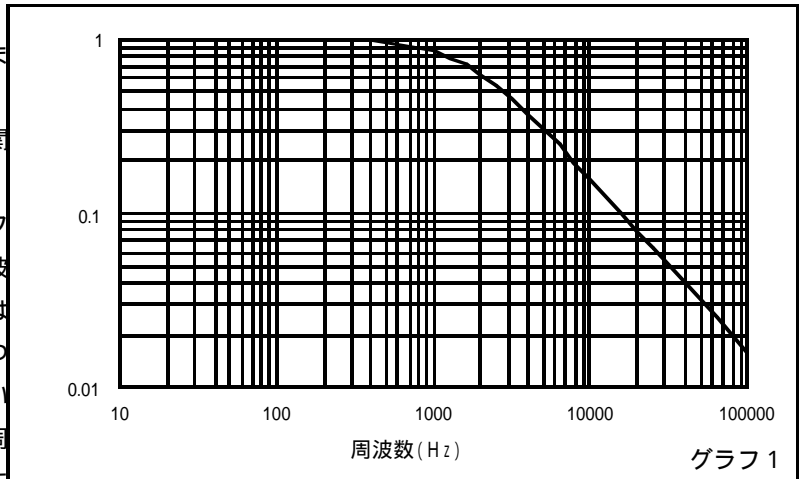
この式より図1の回路の振幅利得 $G_v$ [倍]と位相 [radian]は次のようになる。

$$G_v = \left| \frac{R}{R + j\omega L} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega L/R)^2}}$$

$$\phi = -\arctan(\omega L/R)$$

$\omega L/R=1$ となる周波数 $f(= \omega / 2\pi)$ を遮断周波数またはカットオフ周波数という。 $L=10\text{mH}$ 、 $R=100$ で時定数  $\tau=0.1\text{ms}$ の場合の $G_v$ と  $\phi$ の周波数との関係はグラフ 1、2 のようになる。

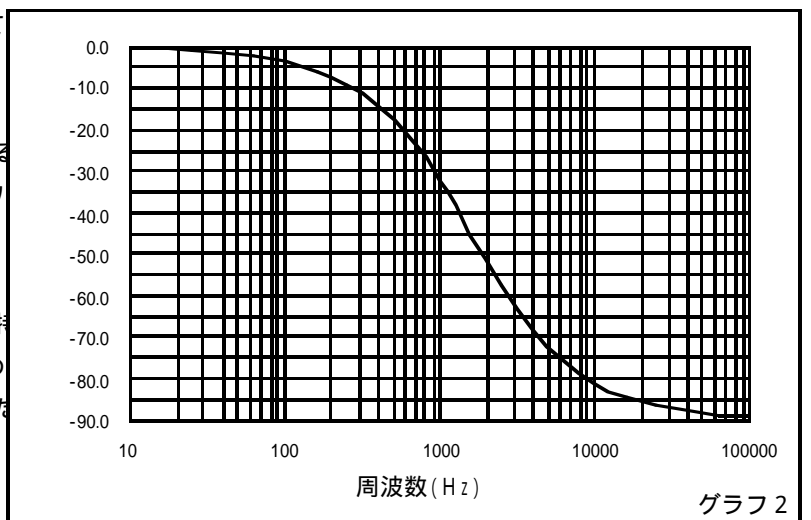
これらのグラフはC R回路 2 におけるローパスフィルタの特性グラフと同じものであり、遮断周波数 $f_c=1.59\text{kHz}$ を境にして、それより低い周波数はほとんど減衰なく伝え、それより高い周波数については周波数に比例して大きな減衰量となっている。また位相シフト量についても同様で、遮断周波数において $-45$ 度で、周波数の低いほうは $0$ 度に漸近し、高い方は $-90$ 度に漸近する特性となっている。



グラフ 1

図 1 3 の回路についても同様に伝達関数を求めることが出来て、得られる特性はC R回路のハイパスフィルタと同じである。

以上で述べたL R回路の周波数特性は、回路の特性を周波数軸で見たものであり、1～3ページのルイス応答特性は、同じ回路の特性を時間軸で見たものであって、両者は表裏一体の関係にある。



グラフ 2

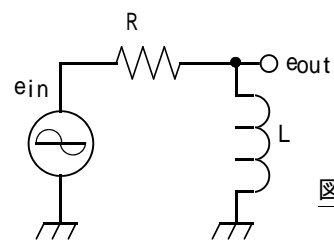


図 1 3